Stefano Giordano et Manon Benedito, “ L’infini au cours des siècles ”,
K. Revue trans-européenne de philosophie et arts, 4 - 1/ 2020, pp.109-128

Stefano Giordano et Manon Benedito

L’infini au cours des siècles

ABSTRACT: The fascinating history of the concept of infinity is indissolubly associated with the development of religions, philosophies, mathematics and natural sciences. At the time of the first Greek philosophers, the infinity, or *áperion,* was a negative concept to be avoided in all rigorous statements. Later, Aristotle partially accepted the idea of infinity by distinguishing *potential infinity* from *actual infinity*. While the former was acceptable, being represented by a growing sequence with no last element, the latter was regarded as impossible, being idealized with a complete infinite sequence consisting of infinitely many elements. These earlier concepts are the basis of all the following developments that led thinkers like Euclid, Archimedes, Galilei, Cauchy, Dedekind, Cantor, Gödel and many others to clarify the concept of infinity and to reach its modern formulation. We propose here a brief outline of the history of the concept of infinity, with particular emphasis on its mathematical definition and implications.
Keywords: concept of infinity, numbers theory, sets theory, geometry, history of mathematics.

On se trompe fort, si l’on croit que l’intelligence de l’homme est parfaite et peut tout découvrir. Les limites de notre intelligence se manifestent clairement dans l’insolubilité du problème de l’infini : les moments, les espaces, les nombres qui se succèdent, aussi est-il impossible de connaître tout ce qui ressortit au domaine du temps et de l’espace. L’intelligence de l’homme est aussi faible et nulle par rapport à la compréhension de ce qui est, que l’intelligence (moyen de connaissance) de l’insecte comparée à celle de l’homme. Un problème d’algèbre paraît insoluble à celui qui ne connaît pas les mathématiques, tandis qu’il est limpide pour qui les pratique. Telle est notre situation vis-à-vis de l’infini. Seulement, on peut apprendre les mathématiques alors qu’aucune étude ne peut résoudre le problème de l’espace et du temps, car notre connaissance est limitée.

Léon Tolstoï, 1917

Le concept d'infini a toujours inspiré, au cours de l'histoire de la philosophie et des mathématiques, une certaine crainte révérencielle, de par l'absence d’une définition universellement acceptée. Ce vide a souvent laissé place à l'indétermination, à l'imprécision et à la confusion dans l'utilisation de la notion d’infini. L'idée d'un univers éternel et sans frontières peut en effet générer un sentiment de terreur, bien décrit par les mots de Blaise Pascal (1623-1662) :

Quand je considère la petite durée de ma vie absorbée dans l’éternité précédente et suivante – *memoria hospitis unius diei praetereuntis* – le petit espace que je remplis et même que je vois abîmé dans l’infinie immensité des espaces que j'ignore et qui m'ignorent, je m'effraye et m'étonne de me voir ici plutôt que là, car il n'y a point de raison pourquoi ici plutôt que là, pourquoi à présent plutôt que lors.

Qui m'y a mis ?

Par l'ordre et la conduite de qui ce lieu et ce temps a-t-il été destiné à moi ? (Pascal, 1670).

En ce qui concerne le monde antique, par exemple les civilisations babylonienne ou égyptienne, nous n'avons reçu aucune information sur l'utilisation du concept d'infini, bien que nous sachions qu'il existait des compétences assez raffinées en géométrie, en mathématiques et en astronomie. En revanche, à l'époque des penseurs grecs, l'infini, ou *ápeiron,* était considéré comme un concept à éviter car il provoquait le désordre et les malentendus (ce rejet est appelé *horror infiniti*). De plus, l'utilisation de la notion d'infini a été fortement déconseillée afin ne pas tomber dans des paradoxes logiques, au risque d'échapper à la vérité dite rationnelle. Littéralement, *ápeiron* représente l'absence de frontière, mais exprime également un caractère indéfini ou indéterminé. Par conséquent, dans l'arithmétique et la géométrie grecques, il était d'usage d'interdire les définitions et les démonstrations qui ne pouvaient être décrites en termes finis et précis. Néanmoins, nous devons mentionner la pensée audacieuse d'Anaximandre, qui était basée sur le concept d'*ápeiron*, considéré comme la substance ou le principe de la génération et de la destruction de toutes choses (Zellini, 1993). Il semble même que l'utilisation du mot *ápeiron* soit à attribuer à Anaximandre lui-même. Anaximandre a également été le premier à concevoir un modèle mécanique cosmologique du monde, où la terre est en équilibre au centre de l'infini, sans être soutenue par aucune force. Pour Pythagore (580/570 av. J.-C. - 495 av. J.-C.), l'école éléatique et Platon (428/427 av. J.-C. - 348/347 av. J.-C.), l'infini était un concept au sens négatif du terme : il était inaccessible à la rationalité et donc irrationnel (Zellini, 1993). Cet infini ou *ápeiron* était considéré comme amorphe puisque rien ne pouvait être ajouté ou enlevé pour changer sa forme. Pythagore pensait que le monde pouvait être exclusivement décrit avec des nombres naturels finis (c'est-à-dire des entiers positifs) et leurs combinaisons. Platon pensait que le Bien, comme toute réalité observable, devait être fini et bien défini, contrairement aux penseurs ultérieurs qui soutenaient l'infinité de l'Absolu (Dantzig, 1930 ; Zellini, 1993).

L'école de Pythagore, par sa description de la nature avec des nombres entiers simples et positifs, a lentement montré des dérives qui en ont quasiment fait une secte de numérologues. Tout cela eut des implications positives car leur recherche maniaque a permis plusieurs découvertes importantes sur les propriétés des nombres (Boyer, Merzbach 2011 ; Kline, 1990). L'évolution de l'école de Pythagore s'est poursuivie jusqu'à l'observation, ou plutôt la découverte d'un objet qui ne pouvait pas être représenté simplement par les nombres naturels et leurs combinaisons. Et cette impossibilité, comme nous le verrons, rapprocha dangereusement Pythagore du concept d'infini, qu'il voulait plutôt rejeter. Hippase de Métaponte (vers le V$^{\text{ème}}$ siècle avant J.-C.) était l'un des plus brillants disciples de l'école de Pythagore et est probablement à l'origine du résultat suivant : si l'on prend un carré de côté égal à une unité, la longueur de la diagonale, à laquelle est aujourd'hui associée la valeur racine de deux, ne peut être exprimée comme un rapport entre deux nombres naturels. Cela signifie que la longueur du côté et la longueur de la diagonale d'un carré sont des quantités incommensurables, i.e. dont le rapport est représenté par un nombre qualifié d'irrationnel en mathématiques.

Pour mieux comprendre ces concepts et leur rapport à l'infini, introduisons brièvement quelques notions de théorie des ensembles ainsi que certaines propriétés des principaux ensembles numériques. Il est difficile de définir le concept d'ensemble sans utiliser de synonymes basiques tels que collection, classe, famille, etc. … Considérons donc le concept d'ensemble comme élémentaire et a priori connu. Si les éléments a, b, c, ... sont contenus dans l'ensemble A, nous écrivons $A = \{a, b, c,...\}$ et nous exprimons le concept d'appartenance avec la notation $a \in A$, $b \in A$, $c \in A$, etc. Nous avons également besoin du quantificateur dit « universel » $\forall$ (lire « pour chaque »), qui est utilisé pour indiquer qu'une certaine proposition est vraie pour chaque élément d'un certain ensemble. Par exemple, si nous considérons deux ensembles A et B, nous pouvons dire que A est un sous-ensemble de B (et nous écrivons $A \subseteq B$) si et seulement si $\forall\ a \in A$, nous avons $a \in B$ (cela signifie que tous les éléments de A doivent également être contenus dans B). Par conséquent, on dit que deux ensembles coïncident si chacun est un sous-ensemble de l'autre. En outre, on dit que A est un sous-ensemble propre de B (cela s'écrit $A \subset B$) lorsque A est un sous-ensemble de B et lorsqu'il y a au moins un élément de B qui n'appartient pas à A (en pratique, B contient les éléments de A mais A et B sont différents). Dans le champ des mathématiques, le concept de fonction ou d'application entre deux ensembles est fondamental. Certaines propriétés des fonctions seront utiles dans la suite pour mieux comprendre la signification de l'infini. On appelle fonction ou application f entre deux ensembles M et N une règle qui associe à chaque $m \in M$ (argument) un et un seul $n \in N$ (image). La fonction est indiquée par la notation $f : M \rightarrow N$ et s'écrit $n = f(m)$. On dit que la fonction f est *surjective* sur l'ensemble N si $\forall\ n \in N$, il existe un élément $m \in M$ tel que $f(m) = n$. Cela signifie qu'une fonction f est surjective lorsque tous les éléments n de N peuvent être obtenus à la suite de l'application f avec un m approprié. On dit aussi que la fonction f est *injective* sur l'ensemble M si $\forall\ n_1, n_2 \in N$ (avec $n_1 \neq n_2$), on a $f(n_1) \neq f(n_2)$. Ainsi, cela signifie que si la fonction est injective, des arguments différents génèrent des images différentes. Enfin, une fonction $f : M \rightarrow N$ est dite *bijective* (ou *biunivoque*) lorsqu'elle est surjective sur N et injective sur M. En pratique, lorsqu'une fonction est biunivoque, chaque argument correspond à une et une seule image.

Ces définitions couvrent des ensembles de toute nature qui peuvent donc contenir des éléments de toute sorte. En mathématiques, les ensembles principaux contiennent différents types de nombres. Le plus simple est l'ensemble des nombres entiers *naturels,* qui contient les nombres 0, 1, 2, 3, etc. Il est indiqué par la notation $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. On y retrouve les opérations élémentaires de somme (+) et de multiplication (×) apprises à l'école primaire. Cet ensemble est généralisé avec l'introduction de nombres négatifs et devient ainsi l'ensemble des nombres entiers *relatifs* représenté par $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$. Aux opérations de somme et de multiplication s'ajoute l'opération de soustraction (–) dans l'ensemble des entiers. Une autre généralisation consiste à définir les fractions et plus précisément l'ensemble des nombres *décimaux* $\mathbb{D} = \{n/10^p, \forall\ n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}\}$ et celui des nombres *rationnels* $\mathbb{Q} = \{n/m, \forall\ n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, m \neq 0\}$. L'ensemble des rationnels a été accepté par les Pythagoriciens et dans celui-ci, l'opération de division (/) s'ajoute aux opérations précédemment introduites de somme, multiplication et soustraction. Les nombres décimaux sont issus d'un rapport $n/10^p$ dont le résultat comporte un nombre fini de chiffres après la virgule. Au contraire, les nombres rationnels peuvent avoir une séquence périodique infinie de chiffres après la virgule. On pourrait penser que ces quatre ensembles épuisent le champ des nombres utilisés en mathématiques, mais ce n'est pas le cas. Comme l'a probablement découvert ou prouvé Hippase de Métaponte (les sources sont très incertaines), le rapport entre la diagonale et le côté du carré n'est pas exprimable comme le rapport de deux entiers naturels et n'est donc pas rationnel. Par conséquent, il doit exister d'autres nombres qui ne sont pas inclus dans les quatre structures $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ venant d'être définies.

Nous pouvons prouver strictement que $d/l \notin \mathbb{Q}$ si d et l sont respectivement la diagonale et le côté du carré. En raisonnant par l'absurde *(reductio ad absurdum)*, admettons que $d/l = n/m$ où n et m sont deux nombres naturels et que n/m est une fraction réduite, c'est-à-dire simplifiée. Pythagore avait établi ce que nous appelons aujourd'hui *le théorème de Pythagore*, qui stipule la chose suivante : *dans un triangle rectangle, l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les cathètes* (autrement dit, selon la version apprise à l'école : *dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés*). Une simple application de ce théorème au triangle formé par deux côtés contigus du carré et de la diagonale permet d'affirmer que $l^2 + l^2 = d^2$, c'est-à-dire $2l^2 = d^2$ ou encore $d^2/l^2 = 2$. L'hypothèse faite au départ $d/l = n/m$ implique que $n^2/m^2 = 2$, c'est-à-dire que $n^2 = 2m^2$. Cela signifie que n^2 doit être pair et donc que n doit également être pair. Si n est pair, on peut toujours l'écrire comme $n = 2p$ où p est un nombre naturel approprié. Néanmoins, nous obtenons la relation $4p^2 = 2m^2$, équivalente à $2p^2 = m^2$. Le dernier rapport obtenu indique que m doit également être pair. Ainsi, dans l'hypothèse où l'on considère le rapport rationnel (simplifié) $d/l = n/m$, il s'ensuit que n et m sont deux nombres pairs. Cela contredit l'hypothèse de la fraction réduite et le ratio d/l ne peut donc pas être rationnel. Aujourd'hui, nous utilisons la notation $d/l = \sqrt{2}$. L'Histoire semble indiquer que ce raisonnement (certainement sous une forme très différente) a été développé pour la première fois par Hippase de Métaponte. Ironiquement, il a (peut-être) dû utiliser le théorème sur les triangles découverts par son maître Pythagore.

La démonstration d'Hippase a établi que certaines quantités ne peuvent être représentées par des nombres entiers et leurs rapports, trahissant les règles fondamentales de l'école pythagoricienne. La légende veut qu'Hippase ait été tué pour cette raison ou soit mort dans un naufrage ordonné par Jupiter lui-même. Le philosophe grec Proclus de Lycie dit *Le Diadoque* (412 après J.-C. - 485 après J.-C.) écrit à ce sujet : « On dit que les gens qui ont divulgué les nombres irrationnels ont péri dans un naufrage jusqu'au dernier, car l'inexprimable, l'informe, doit être absolument tenu secret ; ceux qui l'ont divulgué et ont touché à cette image de la vie ont instantanément péri et doivent rester éternellement ballottés par les vagues. » (Dantzig, 1930). De nos jours, les nombres non rationnels, c'est-à-dire qui ne sont pas représentés par une fraction, sont dits irrationnels. L'union des nombres rationnels et irrationnels forme le champ des nombres qualifiés de réels en mathématiques, qui est symbolisé par $\mathbb{R}$. On peut imaginer, selon une vision géométrique, que les nombres réels représentent les positions de tous les points d'une ligne droite (une formulation précise de cette vision nécessiterait une approche plus rigoureuse). Comme autre généralisation, rappelons le domaine des nombres *complexes* $\mathbb{C} = \{a + ib, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$, formé par un couple de nombres réels et l'unité imaginaire i, solution de l'équation $i^2 + 1 = 0$. Pour le lecteur intéressé, l'histoire et la théorie des nombres complexes peuvent être trouvées dans divers textes de la littérature mathématique (Bottazzini, 1990 ; Courant, Robbins, 1941 ; Kline, 1990). Les ensembles numériques introduits sont clairement liés par le rapport $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Il est intéressant d'expliquer pourquoi la découverte de nombres irrationnels (tels que $\sqrt{2}$) rapproche du concept d'infini. Si l'on considère un nombre décimal ($\in \mathbb{D}$), la fraction correspondante est exprimée par un nombre décimal fini. Par exemple, les fractions $1/4 = 25/100 = 0.25$, $7/5 = 14/10 = 1.4$ et $9/4= 225/100 = 2.25$ ont une représentation décimale finie. Si l'on considère un nombre rationnel ($\in \mathbb{Q}$), la fraction correspondante est exprimée par un nombre décimal périodique infini (Conway, Guy, 1996). Par exemple, les fractions $1/3 = 0.33333... = 0.\overline{3}$ et $7/6 = 1.166666... = 1.1\overline{6}$, $1/7 = 0.142857142857... = 0.\overline{142857}$ ont une représentation décimale illimitée mais périodique (un certain nombre de chiffres, appelé *la période*, est répété indéfiniment et généralement surligné). Dans le cas d'une représentation périodique infinie, il suffit de connaître les chiffres précédant la période et la période elle-même, finie, pour connaître le nombre rationnel correspondant. En revanche, il n'en est pas de même pour les nombres irrationnels. Dans ce cas, il est démontré qu'ils admettent une représentation décimale infinie et apériodique (Conway, Guy, 1996). Cela signifie que l'on doit connaître la série infinie de chiffres pour connaître le nombre exact. Par exemple, nous avons $\sqrt{2}$ = 1.41421 35623 73095 04880 16887 24209 69807 85696 ..., où nous avons seulement écrit les quarante premiers chiffres de la représentation décimale. Il n'existe pas de moyen simple de décrire complètement la séquence de chiffres après la virgule. Il est donc clair que l'introduction de nombres irrationnels est étrangère à la vision pythagoricienne de la nature et admet explicitement la nécessité de travailler avec le concept d'infini.

Zénon d'Élée (489 av. J.-C. - 431 av. J.-C.) a posé un paradoxe logique, en essayant de démontrer l'inexistence du mouvement, qui frise les questions délicates liées au concept d'infini (Radice, 2014). Ce problème est appelé *le paradoxe d'Achille et de la tortue*. Il s'agit d'une course entre Achille, dit *le plus rapide*, et la tortue, nettement plus lente que lui. Les deux coureurs partent en même temps mais la tortue a un avantage de L mètres. Le paradoxe repose sur la logique suivante : pendant le temps nécessaire à Achille pour atteindre le point où se trouve initialement la tortue, celle-ci aura parcouru une petite distance. Lorsqu'Achille aura parcouru ce petit tronçon, la tortue aura à nouveau avancé d'un autre tronçon, encore plus petit. Et ainsi, dit Zénon, Achille n'atteindra jamais la tortue, car il devra parcourir un nombre infini d'espaces couvrant la distance entre les concurrents. Ce paradoxe a suscité de nombreuses perplexités dans le passé, car il est évident (et on peut le constater expérimentalement) que le coureur le plus rapide atteint et dépasse toujours le plus lent, quel que soit son avantage initial. Mais la somme des espaces infinis qu'Achille doit couvrir est-elle finie ou infinie ? La question est résolue en recourant à des concepts mathématiques que les Grecs ne pouvaient pas maîtriser. En effet, nous savons aujourd'hui que la somme d'une infinité d'ajouts peut aboutir à un nombre fini (la distance qu'Achille parcourra pour flanquer la tortue). Pour décrire la solution rigoureuse du paradoxe, nous définissons la vitesse v_a d'Achille et la vitesse v_t de la tortue. Le temps nécessaire à Achille pour atteindre la position initiale de la tortue est $t_1 = L/v_a$. Pendant ce temps, la tortue avance d'une longueur $v_t\, t_1 = L(v_t/v_a)$. Ainsi, au temps t_1, Achille est arrivé à la distance L et la tortue à la distance $L + L(v_t/v_a)$. Puis, Achille prend le temps $t_2 = L(v_t/v_a^2)$ pour passer de la position L à la position $L + L(v_t/v_a)$. En même temps, cependant, la tortue avance d'une distance $v_t\, t_2 = L(v_t/v_a)^2$. Ainsi, au temps t_2, nous avons Achille en position $L + L(v_t/v_a)$ et la tortue en position $L + L(v_t/v_a) + L(v_t/v_a)^2$. En poursuivant ce raisonnement, nous pouvons facilement voir qu'Achille atteint la tortue après la distance totale donnée par $L + L(v_t/v_a) + L(v_t/v_a)^2 + L(v_t/v_a)^3 + L(v_t/v_a)^4 + \ldots$, où nous devrions considérer un nombre infini de termes dans la somme. Zénon considère que cette somme est infinie (en fait, les paradoxes qu'il propose questionnent la divisibilité du mouvement).

Dans les mathématiques actuelles, cette opération est appelée série et dans ce cas précis, elle donne un résultat fini : la distance finie parcourue par Achille pour atteindre la tortue. Si nous posons $x = v_t/v_a$, cette distance est réécrite comme $L(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)$, avec $x < 1$ puisque $v_t < v_a$. La somme finie $S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^N$ peut être calculée comme suit. Considérons le produit $xS = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{N+1}$ et déterminons la différence $S - xS$. Nous obtenons immédiatement $S - xS = 1 - x^{N+1}$ puis nous factorisons par $(1-x)$ et nous trouvons finalement $S = (1 - x^{N+1})/(1 - x)$. Maintenant, intéressons-nous à la valeur limite de S pour N très grand (idéalement infini). Comme $x < 1$, lorsque N croît, la valeur de x^{N+1} devient de plus en plus petite, se rapprochant progressivement de zéro. Par conséquent, pour de grandes valeurs de N, nous avons $S = 1/(1-x)$. La distance parcourue par Achille pour atteindre la tortue est donc égale à $L/(1 - x) = L(1 - v_t/v_a) = Lv_a/(v_a - v_t)$, ce qui est une valeur positive et finie ! La conclusion de Zénon est donc erronée mais ce paradoxe nous a permis de mener une réflexion poussée sur le concept d'infini. Son erreur est acceptable si l'on pense que la première formulation rigoureuse du concept de série numérique n'a été proposée qu'au milieu du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, grâce aux travaux d'Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) (Cauchy, 1821). Ces travaux ont contribué à la création du calcul infinitésimal où des quantités très petites ou très grandes ont permis le développement de techniques de calcul modernes (Boyer, 1959).

Les considérations ci-dessus ont conduit Aristote (384/383 av. J.-C. - 322 av. J.-C.) à repenser le concept d'infini sans l'éliminer complètement de la discussion scientifique et philosophique de l'époque. Néanmoins, il supposait que l'univers était fini et pouvait donc toujours identifier son centre. Afin de faire accepter l'infini, il a défini *l'infini potentiel* (ou *en puissance*) et *l'infini actuel* (ou *en acte*) (Gazalé, 2000 ; Moore, 1995 ; Rucker, 1991 ; Zellini, 1993). L'infini en puissance est une forme d'infini observée lorsqu'une succession d'éléments peut croître indéfiniment sans jamais atteindre complètement l'infini. Par exemple, si nous considérons l'ensemble des nombres naturels, nous pouvons toujours en ajouter à la liste, sans jamais terminer l'opération. C'est la raison pour laquelle nous parlons d'infini potentiel, il pourrait être infini mais en réalité, nous n'arrivons jamais au bout de la procédure pour l'approcher. La procédure incrémentale de Zénon représente exactement le concept d'infini potentiel. Au contraire, l'infini en acte représente une forme d'infini accompli, auquel il n'est pas nécessaire ajouter d'autres éléments pour le réaliser, mais dont la complétude est déjà évidente. Par exemple, si nous pensons à une ligne droite, nous devons admettre qu'elle est infinie telle que nous la concevons, sans avoir à imaginer une procédure pour atteindre l'infini progressivement. Eh bien, Aristote pensait que le concept d'infini potentiel était acceptable et utile dans l'analyse des mathématiques et de la nature, alors que l'infini actuel devait être nié sans aucun doute. Selon cette conception, l'infini en tant que totalité accomplie, c'est-à-dire l'infini actuel, n'existe pas.

La profondeur de la pensée de l'école grecque peut être davantage appréciée dans les Éléments d'Euclide (vers 300 avant J.-C.) où, outre une sublime formulation de la géométrie (qui est restée intacte jusqu'au début du XX^{ème} siècle, sans tenir compte du développement des géométries dites non euclidiennes), d'importantes observations sur le concept d'infini sont fournies (Boyer, 1959). En particulier, Euclide est capable de démontrer que les nombres premiers sont infinis en nombre. En effet, comme il ne pouvait pas, à l'époque, se permettre de citer un infini actuel, il formula le théorème en ces termes *: étant donné une collection arbitraire de nombres premiers, il existe un nombre premier différent de ceux-ci* (Courant, Robbins, 1941 ; Schroeder, 1984). Comme nous le verrons, cette formulation nous permet d'aborder le problème à travers un infini potentiel. Voici quelques définitions utiles pour mieux comprendre le théorème d'Euclide et sa démonstration. Tout d'abord, un nombre premier est un nombre naturel (supérieur à un par définition) qui n'est divisible que par un et par lui-même. Les premiers nombres premiers (inférieurs à 100) sont les suivants : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Les nombres premiers sont d'une extrême importance dans toutes les mathématiques et, en particulier, dans la théorie des nombres. Ils interviennent dans le théorème fondamental de l'arithmétique qui peut être énoncé sous cette forme : *tout nombre naturel (supérieur à un) est soit un nombre premier, soit un produit de nombres premiers* (Schroeder, 1984 ; Weil, 2001). Ceci étant, nous pouvons montrer l'élégance de la démonstration d'Euclide. Considérons la collection de nombres premiers donnés et faisons leur produit. A cette quantité, nous ajoutons ensuite 1. Nous obtenons un nombre N, plus grand que tous les nombres de la collection originale. Si nous divisons ce nombre N par l'un des nombres premiers donnés, nous obtenons naturellement 1 comme reste de cette division. Ce nombre N ne peut donc pas être décomposé à l'aide des nombres premiers initiaux à sa composition. Cependant, ce nombre doit être pris en compte comme un produit d'autres nombres premiers pour le théorème fondamental de l'arithmétique. Il est donc conclu qu'il existe au moins un nombre premier différent des nombres premiers donnés initialement. Essayons d'utiliser récursivement la procédure décrite dans la démonstration en partant des deux premiers nombres premiers, c'est-à-dire de la collection $\{2, 3\}$. Nous avons $N = 2 \times 3 + 1 = 7$, qui est premier. Reprenons à partir de la collection $\{2, 3, 7\}$. Nous obtenons $N = 2 \times 3 \times 7 + 1 = 43$, qui est aussi premier. Nous pouvons alors recommencer avec $\{2, 3, 7, 43\}$. Un simple calcul nous indique que $N = 1807$, qui se décompose en $N = 13 \times 139$ (où 13 et 139 sont les premiers). Nous pouvons ensuite utiliser la nouvelle collection $\{2, 3, 7, 13, 43, 139\}$, de laquelle on obtient $N = 3263443$, qui est un autre nombre premier. Nous constatons donc qu'à chaque itération, nous ajoutons au moins un nombre premier à la liste (dans un ordre assez complexe), ce qui prouve que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Le brillant test d'Euclide est un parfait exemple d'infini potentiel. Le théorème est si important que certains auteurs en rapportent six démonstrations différentes (Aigner, Ziegler, 1998). Un résultat plus fort mais beaucoup plus récent est donné par le théorème de Joseph Louis François Bertrand (1822-1900) : *pour chaque entier naturel n supérieur à un, il existe un nombre premier p tel que* $n < p < 2n$. Cette propriété nous en dit plus sur la distribution des nombres premiers mais sa démonstration nous mènerait trop loin (Aigner, Ziegler, 1998). Les nombres premiers sont la base de la théorie des nombres et les lecteurs intéressés sont invités à consulter des textes spécifiques (Weil, 2001 ; Schroeder, 1984).

D'autres problèmes mathématiques formulés par les Grecs ont plus tard permis d'approcher différents aspects du concept d'infini. Notamment, la géométrie développée par les Grecs posait des problèmes fondamentaux qui n'ont été rigoureusement résolus que deux mille ans plus tard. Trois problèmes, en particulier, ont occupé les plus grands esprits mathématiques de tous âges : la duplication du cube, la trisection de l'angle et la quadrature du cercle (Boyer, Merzbach 2011 ; Courant, Robbins, 1941). Les Grecs aimaient résoudre les problèmes de géométrie en utilisant exclusivement la règle (non graduée) et le compas, et les trois problèmes doivent donc être interprétés comme suit :

1) Au vu du côté d'un cube, peut-on construire à l'aide d'une règle et d'un compas un autre côté appartenant à un cube de double volume ?

2) Etant donné un angle, peut-on construire avec une règle et un compas un autre angle qui vaut le tiers de l'angle initial ?

3) Partant d'un cercle, peut-on construire avec une règle et un compas un carré de même surface ?

La caractérisation définitive des problèmes qui peuvent être résolus uniquement à l'aide de la règle et du compas est due à Pierre-Laurent Wantzel (1814-1848), qui a prouvé la propriété suivante (1837) : *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un problème de géométrie plane puisse être résolu à l'aide de la règle et du compas est que les solutions soient obtenues à partir des données par des opérations rationnelles successives* (+, –, ×, /) *et des extractions de racine carrée*. Il ne serait pas difficile de présenter la démonstration ici ; néanmoins, par souci de concision, les lecteurs intéressés sont renvoyés vers des textes spécifiques (Courant, Robbins, 1941). Ce théorème nous permet d'affirmer que les deux premiers problèmes de la géométrie grecque sont insolubles parce que leurs solutions sont écrites au moyen de racines cubiques, comme on peut facilement le prouver. Une nouvelle fois, les Grecs avaient posé des problèmes qui, pour être résolus, supposaient une bonne connaissance des propriétés des nombres irrationnels. Quant à la solution du troisième problème, qui concerne la quadrature du cercle, il faut attendre la grande révolution culturelle concernant l'infini, qui eut lieu vers la fin du XIX^{ème} siècle et en particulier le théorème de non-constructibilité de π, qui a été prouvé en 1882. Ces résultats seront décrits plus loin. Malgré les difficultés engendrées par le troisième problème à son époque, Archimède de Syracuse (environ 287 av. J.-C. - 212 av. J.-C.) a réussi à démontrer qu'un cercle a la même surface qu'un triangle dont la base est aussi longue que la circonférence et la hauteur aussi longue que le rayon. Pour obtenir ce résultat exact, Archimède a approximé le cercle avec des polygones réguliers inscrits (à l'intérieur) et circonscrits (à l'extérieur). Il avait compris qu'en faisant croître indéfiniment le nombre de côtés (vers l'infini), les deux séries de polygones inscrits et circonscrits se rapprocheraient de plus en plus de la forme du cercle. Avec cette méthode, il a pu déterminer une bonne estimation de π (symbole moderne du rapport entre la circonférence et le diamètre d'un cercle donné) dans l'intervalle $223/71 < \pi < 22/7$. Nous pouvons comparer ce résultat avec la valeur exacte connue aujourd'hui $\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971 \ldots$, où nous avons indiqué les 40 premières décimales.

Les problèmes classiques de la géométrie grecque et le problème de la définition de l'infini sont restés sans solution jusqu'au XIX$^{\text{ème}}$ siècle et il n'y eut que quelques contributions importantes au Moyen Age et à la Renaissance. Au Moyen Age, le théologien franciscain Guillaume d'Ockham (1295-1349) se consacra au concept d'infini et soutint une thèse révolutionnaire pour son époque : selon lui, il n'était pas impossible que la partie d'une grandeur ne soit pas plus petite que la totalité : en effet, « cela arrive chaque fois qu'une partie du tout est infinie ... » (Zellini, 1993). Cette vision est exactement à la base de la définition moderne de l'infini et est antérieure à la théorie de Dedekind, exposée ci-dessous. Nicolas de Cues (1401-1464) s'est servi des idées d'Ockham pour introduire courageusement l'idée d'un univers infini et sans centre, idée qui a influencé le cours des études astronomiques jusqu'à l'époque moderne. C'est Giordano Bruno (1548-1600) à la Renaissance, influencé par les œuvres de Nicolas Copernic (1473-1543) et de Nicolas de Cues, qui a déclaré avec force que l'univers est infini, ouvrant les portes de l'infini actuel introduit par la vision aristotélicienne, avec ces mots : « Un est donc le ciel, l'espace immense, le sein, le contenant universel, la région éthérée à travers laquelle le tout se déplace et se meut. Là les sens nous montrent d'innombrables étoiles, astres, globes, soleils et terres, et la raison nous en fait admettre une infinité. L'univers immense et infini est le composé qui résulte de cet espace et de tous les corps qu'il comprend ». (Bruno, 1584).

Malgré ces importantes ouvertures vers le concept d'infini, De Cues et Bruno n'étaient pas des mathématiciens et leurs idées devaient être formalisées. Galilée (1564-1642) a suivi les idées d'Ockham sur l'infini. Conformément au paradoxe de Zénon, Galilée a réalisé qu'il pouvait diviser un segment fini en éléments infinitésimaux. Il a admis que si le segment est divisé en un nombre infini de parties, celles-ci doivent être toujours plus petites. Suivant la logique d'Archimède, il a également observé qu'un segment peut être déformé de façon continue pour former n'importe quel polygone régulier avec un nombre arbitraire de côtés. Ainsi, en lui faisant prendre la forme d'un cercle, on peut dire qu'il a atteint l'infini actuel, contre le credo d'Aristote. En plus de ces arguments, Galilée a présenté un paradoxe important sur le concept d'infini, appelé *le paradoxe des carrés*. Il a considéré l'ensemble des entiers naturels $N = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ et l'ensemble des carrés des naturels $S = \{0, 1, 4, 9, 16, ...\}$. Galilée a constaté une correspondance bidirectionnelle entre les deux ensembles N et S. Les ensembles devraient donc comporter le même nombre d'éléments. Voici le commentaire original de Galilée : « C'est bien là une des difficultés qui surgissent quand nous discutons, avec notre esprit fini, des choses infinies, et leur attribuons les épithètes que nous utilisons pour les choses finies et limitées ; ce qui, à mon avis, est incorrect, car j'estime que des épithètes comme « plus grand », « plus petit » et « égal » ne conviennent pas aux grandeurs infinies, dont il est impossible de dire que l'une est plus grande, plus petite ou égale à une autre. » (Galilée, 1638).

Mais il est également clair que l'ensemble des carrés comporte, dans un certain sens, moins d'éléments que N. Galilée a écrit à ce sujet : « A mes yeux la seule issue possible est de dire que l'ensemble des nombres est infini, que le nombre des carrés est infini, et le nombre de leurs racines pareillement ; que le total des nombres carrés n'est pas inférieur à l'ensemble des nombres, ni celui-ci supérieur à celui-là et, finalement, que les attributs « égal », « plus grand » et « plus petit » n'ont pas de sens pour les quantités infinies, mais seulement pour les quantités finies. » (Galilée, 1638).

Eh bien, ce paradoxe et les idées de Guillaume d'Ockham et de Galilée ont conduit à la définition moderne d'un tout infini. Vers la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, le concept d'infini est entré en force dans les recherches des mathématiciens, qui, pour la première fois, ont employé une définition de l'infini actuel. Dans ces études, l'anatomie de l'infini a été réellement explorée. Cette théorie est basée sur la possibilité de comparer la quantité des éléments contenus dans deux ensembles différents. Raisonnons d'abord avec deux ensembles finis (c'est-à-dire avec un nombre fini d'éléments). Il est évident que deux ensembles finis ont le même nombre d'éléments si et seulement si nous pouvons définir une correspondance à double sens entre eux (bijective). Ainsi, la comparaison entre les deux ensembles passe par la construction d'une fonction entre eux avec certaines propriétés. Ces considérations ont conduit Richard Dedekind (1831-1916) à donner en 1872 la définition suivante d'un ensemble infini : *un ensemble est dit infini s'il existe au moins une application biunivoque entre lui-même et un de ses sous-ensembles propres*. Par conséquent, *on dit qu'un ensemble est fini s'il n'est pas infini*. S'il existe effectivement une correspondance biunivoque entre deux ensembles finis ayant le même nombre d'éléments, ce principe est violé pour les ensembles infinis. Par exemple, il existe une correspondance biunivoque entre tous les entiers positifs et leurs carrés, même si l'ensemble des carrés semble plus petit (paradoxe de Galilée). Les définitions de Dedekind ont définitivement formalisé l'infini (en particulier l'infini actuel) et ont permis d'approfondir son étude (Dedekind, 1872 et 1893). L'ensemble infini le plus simple que nous ayons introduit est l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$. Il est infini car il existe une correspondance à double sens entre $\mathbb{N}$ et, par exemple, l'ensemble des carrés des éléments de $\mathbb{N}$, comme nous l'avons déjà observé.

Pour comparer les ensembles, donnons la définition suivante : deux ensembles A et B sont équivalents s'il existe une application biunivoque entre eux. De plus, on définit par puissance d'un ensemble fini son nombre d'éléments (cardinalité) et on dit que deux ensembles infinis ont la même puissance s'ils sont équivalents. La chose intéressante à approfondir est la suivante : tous les ensembles infinis sont-ils en correspondance biunivoque avec $\mathbb{N}$, l'ensemble infini le plus simple que nous connaissions et sachions traiter ? Commençons par qualifier d'ensemble dénombrable un ensemble A s'il existe une application biunivoque entre A et $\mathbb{N}$. Comment se comportent $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ en matière de dénombrabilité ? Les entiers $\mathbb{Z}$ représentent un ensemble dénombrable et il est facile de le prouver en considérant ses éléments dans l'ordre $\{0, -1, +1, -2, +2, -3, ...\}$. Cette séquence est en évidente correspondance biunivoque avec $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ et ainsi, $\mathbb{Z}$ est dénombrable. Les ensembles des nombres décimaux $\mathbb{D}$ et rationnels $\mathbb{Q}$ sont également dénombrables. Pour vérifier cette déclaration, considérons $a \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire $a = n/m$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$. Pour une fraction a ainsi définie, introduisons la *hauteur* $h(a) = |n| + m$, qui est un nombre naturel (rappelons que la valeur absolue $|x|$ de x vaut x si $x > 0$ et vaut $-x$ si $x < 0$). Il est évident que le nombre de fractions de hauteur donnée est fini. Par suite, pour dénombrer $\mathbb{Q}$, il suffit de trier les rationnels en classes de hauteur égale. Il est intéressant de noter que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalents et ont donc la même puissance. Cela signifie que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ sont représentés par le même type d'infini. Le fait que $\mathbb{Q}$ puisse être dénombré est assez surprenant si l'on imagine la densité des nombres rationnels sur la ligne et qu'on la compare à celle des ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$. L'étape suivante dans cette analyse de l'infini a été franchie par Georg Cantor (1845-1918) qui a prouvé la non-dénombrabilité de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ (Cantor, 1891). Cela signifie que l'ensemble des nombres réels présente un type d'infini complètement différent de celui des ensembles dénombrables et, dans un certain sens, supérieur aux nombres entiers ou rationnels. La démonstration par l'absurde de Cantor est si originale qu'elle sert aujourd'hui de modèle à de nombreux autres développements. Tout d'abord, Cantor, au lieu d'utiliser toute la droite réelle $\mathbb{R}$, utilise l'intervalle [0,1] de la ligne elle-même. Ce point de départ ne pose aucun problème car $\mathbb{R}$ et [0,1] sont équivalents, vu leurs nombreuses correspondances (par exemple, $y = (1/\pi)$

arctan(x) +1/2 associe l'intervalle [0,1] à l'axe réel $\mathbb{R}$). Supposons, en raisonnant par l'absurde, avoir numéroté tous les réels de l'intervalle [0,1], en les disposant dans un tableau comme suit :

1[er] nombre = 0. $a_1a_2a_3a_4$...

2[ème] nombre = 0. $b_1b_2b_3b_4$...

3[ème] nombre = 0. $c_1c_2c_3c_4$...

4[ème] nombre = 0. $d_1d_2d_3d_4$...

et ainsi de suite, où les lettres numérotées représentent les chiffres après la virgule. Il est admis que cette séquence dénombrable contient tous les réels de l'intervalle [0,1]. Un nouveau nombre, non présent dans la liste, peut maintenant être construit en utilisant *le procédé diagonal* de Cantor. Il est défini par $z = 0.abcd$..., où $a \neq a_1$ (et aussi $a \neq 0$ et $a \neq 9$), $b \neq b_2$ (et aussi $b \neq 0$ et $b \neq 9$), $c \neq c_3$ (et aussi $c \neq 0$ et $c \neq 9$), $d \neq d_4$ (et aussi $d \neq 0$ et $d \neq 9$), etc. Tous les chiffres autres que 0 et 9 sont utilisés pour éviter les ambiguïtés générées par des égalités telles que 1.000... = 0.999... ou similaires. Le nombre z qui vient d'être défini n'est pas dans la liste, qui n'est par conséquent pas exhaustive. Il s'ensuit que [0,1], $\mathbb{R}$ ou tout autre intervalle de $\mathbb{R}$ sont des ensembles non dénombrables. Nous avons donc trouvé des ensembles qui présentent un nouveau type d'infini, différent de celui des ensembles dénombrables. Ainsi, nous connaissons pour l'instant deux types d'infini bien définis et distincts. Introduisons donc la puissance m des ensembles dénombrables qui est indiquée par $\aleph_0$ ($\aleph$, aleph, première lettre de l'alphabet hébreu) et s'écrit $m(\mathbb{N}) = m(\mathbb{Z}) = m(\mathbb{D}) = m\,(\mathbb{Q}) = \aleph_0$; la puissance m des nombres réels est appelée puissance du continu, indiquée par $\aleph_1$ et s'écrit $m(\mathbb{R}) = \aleph_1$. Cantor lui-même et de nombreux mathématiciens qui l'ont suivi ont traité deux problèmes importants :

1) Existe-t-il des ensembles avec une puissance comprise entre $\aleph_0$ et $\aleph_1$? Ce problème a ouvert les portes à une formalisation très fine de la théorie des ensembles (l'inexistence d'ensembles dont la cardinalité se situe strictement entre celle des entiers et celle des nombres réels est appelée *l'hypothèse du continu*) (Hilbert, 1926 ; Dauben, 1983 ; Radice, 2014).

2) Existe-t-il des types d'infinis plus grands que $\aleph_0$ et $\aleph_1$? Cette question a conduit à la définition des ensembles de Cantor dits transfinis représentés par la séquence $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$, ..., qui généralisent les ensembles dénombrables et la puissance du continu.

Toutefois, une discussion approfondie de ces deux problèmes nous mènerait trop loin (Hilbert, 1926 ; Radice, 2014 ; Courant, Robbins, 1941 ; Bottazzini, 1990).

Les réels n'étant pas dénombrables, à la différence des rationnels, on pourrait en déduire que ce sont les nombres irrationnels qui confèrent à $\mathbb{R}$ la puissance du continu. Mais, à nouveau, notre intuition est faussée. Effectivement, il existe une classe de nombres beaucoup plus importante que $\mathbb{Q}$ qui reste dénombrable. Ce sont les nombres dits *algébriques*. Un nombre est dit algébrique s'il est la solution d'une équation polynomiale avec des coefficients entiers. En d'autres termes, un nombre est algébrique s'il est la solution d'une équation de la forme $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n = 0$, avec des coefficients a_i entiers. Par exemple, $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel mais il est algébrique en tant que solution de $x^2 - 2 = 0$. Eh bien, *l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable*, comme l'a d'abord prouvé Cantor. La démonstration est simple et, une fois de plus, très élégante. Faisons correspondre à chaque équation du type $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n = 0$ avec a_i, le nombre suivant $h = |a_0| + |a_1| + ... + |a_{n-1}| + |a_n| + n$, dit *hauteur de l'équation*. Nous pouvons facilement constater que pour chaque valeur de h, il existe un nombre fini d'équations. Mais chacune de ces équations a tout au plus n racines distinctes (comme l'indique le théorème fondamental de l'algèbre) (Courant, Robbins, 1941). Ainsi, pour chaque hauteur h, il y a un nombre fini de nombres algébriques. Cela implique la possibilité de les dénombrer dans une séquence et démontre donc leur caractère dénombrable. Le concept de nombre algébrique est également important pour la question des constructions géométriques réalisées à l'aide d'une règle et d'un compas uniquement. Il ne serait pas difficile de démontrer le théorème suivant : *les nombres qui peuvent être construits avec la règle et le compas à partir du segment d'unité sont algébriques* (Courant, Robbins, 1941).

Comme les nombres algébriques sont un ensemble dénombrable contrairement aux nombres réels, il faut admettre l'existence de nombres réels non algébriques. On les appelle les *nombres transcendants*. Après avoir démontré que la classe des nombres algébriques, qui est beaucoup plus grande que celle des nombres rationnels, a la puissance des ensembles dénombrables, nous concluons que ce sont précisément les nombres transcendants qui confèrent au système des nombres réels la densité suffisante pour donner naissance à une puissance plus élevée. Cantor, avec la théorie exposée, a pu prouver l'existence de nombres transcendants. En outre, Joseph Liouville (1809-1882) a introduit une méthode pratique pour construire des nombres véritablement transcendants (Kline, 1990 ; Boyer, Merzbach 2011). En 1873, Charles Hermite (1822-1901) a prouvé que le nombre d'Euler (ou de Néper) $e = 2{,}7182818284590...$ est transcendant. En 1882, Ferdinand von Lindemann (1852-1939) a publié la démonstration de la transcendance de π. En conclusion, le troisième des problèmes des mathématiques grecques classiques, la quadrature du cercle, est insoluble parce que π est transcendant alors que tous les nombres qui peuvent être construits avec la règle et le compas sont algébriques.

L'approche de l'infini de Dedekind et Cantor était si profonde et révolutionnaire qu'elle a influencé toutes les mathématiques ultérieures, de la théorie des ensembles à la théorie des nombres. Cantor a dû faire d'immenses efforts pour convaincre ses contemporains de l'exactitude de ses théories car les mathématiciens de l'époque étaient encore imprégnés de cette *horror infiniti* de l'école grecque. Parmi ses détracteurs, on trouve Léopold Kronecker (1823-1891), qui a été son professeur, et qui a dit que « Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'Homme » (Kronecker, 1893) (rappelez-vous les idées des Pythagoriciens) et Jules Henri Poincaré (1854-1912), dont les propos sont les suivants : « [La théorie de Cantor n'est qu'] une maladie, une affection perverse dont les mathématiques guériront un jour » (Bellos, 2011). Probablement aussi à cause de cet ostracisme d'une partie de la communauté scientifique, Cantor souffrit de périodes de profonde dépression qui le conduisirent à la mort dans un asile à Halle en 1918. Il trouvait parfois du réconfort dans les louanges de deux grands mathématiciens. Bertrand Russell (1872-1970) a déclaré : « La solution des difficultés qui entouraient auparavant l'infini mathématique est probablement le plus grand succès dont notre époque puisse se glorifier » (Russell, 1918). David Hilbert (1862-1943) a dit cela : « Du paradis que Cantor a créé pour nous, personne ne doit pouvoir nous chasser. » (Hilbert, 1926). Et il a ajouté : « Je veux dire la théorie des *nombres transfinis* ; celle-ci m'apparaît en effet comme le produit le plus étonnant de la pensée mathématique, comme une des plus belles réalisations de l'activité humaine dans le domaine du pur intelligible. » (Hilbert, 1926). Et encore : « Ainsi, grâce au gigantesque travail collectif de Frege, Dedekind, Cantor, l'infini fut-il finalement élevé sur le trône, et connut-il son plus grand triomphe. L'infini, d'un vol audacieux, était parvenu à un succès vertigineux » (Hilbert, 1926).

La recherche sur l'infini ne s'arrête pas aux théories de Cantor et, au contraire, la partie la plus intéressante (mais plutôt complexe) se développe plus tard. L'hypothèse du continu (posée par Hilbert comme le premier de ses problèmes ouverts) est en fait intimement liée à la cohérence des axiomes de l'arithmétique et de la théorie des ensembles (Dauben, 1983 ; Bottazzini, 1990). Au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, de nombreux paradoxes ou antinomies mettant en grande difficulté les fondements mathématiques ont été proposés. Russell a travaillé pendant des années pour tenter de reconstruire l'ensemble des mathématiques en se basant sur quelques axiomes et concepts, en accord avec l'école de Hilbert. En réaction et en parallèle à cette vision logiciste, un programme intuitionniste s'est développé grâce aux travaux de Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), selon lequel il était impossible de déduire toutes les mathématiques de la logique pure (Bottazzini, 1990). En vertu de cette vision, les mathématiques se développent à partir de certaines intuitions a priori fondamentales. En ce sens, Brouwer était d'accord avec Poincaré sur la critique des théories de Cantor sur l'infini. Dans les années 1930, Kurt Gödel (1906-1978), exploitant à la fois le formalisme hilbertien et l'intuitionnisme, a travaillé sur la complétude des systèmes formels et les démonstrations de leur nature non contradictoire. Ces travaux, ainsi que les travaux ultérieurs de Paul Joseph Cohen (1934-2007), ont clarifié la relation entre l'hypothèse du continu, l'axiome du choix et les axiomes de l'arithmétique et de la théorie des ensembles (Bottazzini, 1990). Plus précisément, les trois étapes de ce parcours peuvent être résumées comme suit :

1) la théorie des ensembles a été formalisée au début du XX^{ème} siècle avec un système d'axiomes nommé ZFC d'après Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953) et Adolf Abraham Halevi Fraenkel (1891-1965). La lettre C représente l'axiome du choix : étant donnée une collection d'ensembles non vides, il existe toujours un ensemble ayant exactement un élément commun avec chacun de ces ensembles.

2) Gödel a prouvé en 1938 que si le système d'axiomes ZFC est non contradictoire, alors il ne peut pas démontrer que l'hypothèse du continu est fausse (Gödel, 1938).

3) Cohen a prouvé en 1963 que si le système d'axiomes ZFC est non contradictoire, alors il ne peut pas démontrer l'hypothèse du continu (Cohen, 1963, 1964). Donc, l'hypothèse du continu est un énoncé *indécidable* de la théorie ZFC.

Le programme futur est clair : ajouter un ou plusieurs axiomes « raisonnables » à ZFC pour savoir si l'hypothèse du continu est vraie ou non (Delahaye, 2019a). Donc, le problème théorique de l'infini est encore largement étudié aujourd'hui et plusieurs lignes de recherche sont ouvertes (les grands cardinaux, les théories des types, les univers de Grothendieck, …). Le concept d'infini est aussi très proche des sciences physiques étudiant des quantités extrêmement petites et extrêmement grandes. Pensons d'une part au développement des nanotechnologies pour des applications physiques, chimiques et biologiques (un atome d'hydrogène a un rayon de 53×10^{-12} m et une masse de 1.6×10^{-27} kg) et d'autre part à l'étude de l'univers avec les planètes, les étoiles et les galaxies (l'univers observable a un diamètre d'environ 9×10^{26} m et une masse de 1.5×10^{53} kg). En réalité, la physique utilise toujours des quantités finies (bien que très petites ou très grandes) et n'a pas vraiment besoin de nombres réels car ces quantités sont connues avec une précision limitée (Delahaye, 2019b). De plus, il n'y a, pour l'instant, aucune relation entre l'hypothèse du continu et la réalité physique. Néanmoins, même si les recherches sur l'axiomatisation complémentaire de ZFC sont plutôt abstraites, ces travaux pourraient un jour avoir des applications physiques : en effet, le fait d'ajouter des axiomes à une théorie peut avoir des conséquences sur ce qui peut être démontré sur les nombres entiers et donc sur des quantités finies. En particulier, peut-être donc que ces théories pourront donner un jour un aperçu plus approfondi sur l'extrêmement petit et l'extrêmement grand de la physique.

Bibliographie

Aigner, M., Ziegler, G. M., 2002, *Raisonnements divins : Quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes*, traduction française de Nicolas Puech, Paris, Springer-Verlag France ; éd. or. 1998, *Proofs from THE BOOK*, Berlin, Springer.

Bellos, A., 2011, *Alex au pays des chiffres*, Anatole Muchnik (traduction), Paris, Robert Laffont.

Bottazzini, U., 1990, *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, Torino, UTET Libreria.

Boyer, C. B., Merzbach, U. C., 2011, *A history of mathematics*, Hoboken, New Jersey, John Wiley & Sons.

Boyer, C. B., 1959, *The history of the calculus and its conceptual development*, Mineola, N.Y., Dover Publications Inc.

Bruno, G., 2006, *De l'infini, de l'univers et des mondes*, traduction française de Pierre Cavaillé, Paris, Les Belles lettres ; Bruno, G., 1985, *De l'infinito, universo e mondi*, a cura di Giovanni Aquilecchia, Firenze, Sansoni ; éd. or. Bruno, G., 1584, *De l'infinito universo et mondi, All'illustrissimo Signor di Mauvissiero*, Stampato in Venezia, Anno MDLXXXIIII.

Cantor, G., 1992, *Sur une question élémentaire de la théorie des ensembles*, traduction de Hourya Sinaceur, in *Logique et fondements des mathématiques, Anthologie (1850-1914)*, Paris, Payot ; éd. or. 1891, *Über eine elementare Frage zur Mannigfaltigkeitslehre*, in Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, n°1, pp. 75-78.

Cauchy, A.L., 1821, *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*, 1ère partie (seule parue) : Analyse algébrique, Paris, Chez Debure frères.

Cohen, P. J. 1963, *The Independence of the Continuum Hypothesis*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 50, n.6, 1143–1148.

Cohen, P. J. 1964, *The Independence of the Continuum Hypothesis, II,* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 51, n.1, 105–110.

Conway, J. H., Guy, R. K., 1996, *The books of numbers*, New York, Springer-Verlag.

Courant, R., Robbins, H., 2015, *Qu'est-ce que les mathématiques ? Une introduction élémentaire aux idées et aux méthodes*, traduction de Marie Anglade et Karine Py, Paris, Cassini ; éd. or. 1941, *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods*, Oxford, Oxford University Press.

Dantzig, T., 1931, *Le Nombre, langage de la science*, traduction du Colonel Georges Cros, Paris, Payot ; éd. or. 1930*, Number: The Language of Science: A Critical Survey Written for the Cultured Non-Mathematician*, Londres, Macmillan.

Dauben, J. W., 1983, *Georg Cantor and the Origins of Transfinite Set Theory*, Scientific American (Volume 248, Issue 6, June 1983).

Dedekind, R., 2008, *La Création des nombres*, traduction de Hourya Sinaceur, Paris, Vrin, coll. « Mathesis » ; éd. or. 1872, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Wiesbaden, Vieweg Verlag et 1893, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Wiesbaden, Vieweg Verlag.

Delahaye, J.-P., 2019a, *En finir avec l'hypothèse du continu*, Pour la Science n°504.

Delahaye, J.-P., 2019b, *La physique a-t-elle besoin des nombres réels ?*, Pour la Science n°506.

Galilée, 1995, *Discours concernant deux sciences nouvelles*, traduction de Maurice Clavelin, Paris, Presses universitaires de France ; Galilei, G., 1958, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, a cura di Adriano Carugo e Ludovico Geymonat*, Torino, Bollati Boringhieri Editore, éd. or. Galilei, G., 1638 *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze,* Leida, Elseviri.

Gazalé, M., 2000, *Number: From Ahmes to Cantor*, Princeton, New Jersey, Princeton University Press.

Gödel, K., 1938, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 24, nº 12, 556–557.

Hilbert, D., 1926, *Sur l'infini*, traduction d'André Weil, in « Math. Ann. », n°95, pp. 161-190 (conférence prononcée le 4 juin 1925 à Münster pour le congrès de la Société Mathématique de Westphalie en l'honneur de la mémoire de Weierstrass).

Kline, M., 1990, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Volume 1-3, Oxford, Oxford University Press.

Kronecker, L., 1893, cité par Heinrich Weber dans la nécrologie « Leopold Kronecker », Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, n°2, 19 (conférence prononcée en 1886 à la Conférence des Sciences Naturelles de Berlin).

Moore, A. W., 1995, *A brief history of infinity*, in « Scientific American », n°272, issue 4.

Pascal, B., 1960, *Pensées*, Lausanne, Éditions Rencontre, éd. or. Pascal, B., 1670, *Pensées de M. Pascal sur la religion et sur quelques autres sujets, qui ont été trouvées après sa mort parmi ses papiers*, Paris, Les éditions de Port-Royal.

Radice, L. L., 2014, *L'infinito. Itinerari filosofici e matematici di un concetto base*, Roma, Editori Riuniti.

Rucker, R., 1991, *Infinity and the mind: the science and philosophy of the infinite*, Princeton, Princeton University Press.

Russell, B., 1922, *Le Mysticisme et la Logique*, traduction de Jean de Menasce, Paris, Payot ; éd. or. 1918, *Mysticism and logic*, Mineola, Dover Publications.

Schroeder, M. R., 1984, *Number Theory in Science and Communication*, Berlin, Springer-Verlag.

Tolstoï, L., 1917, *Journal intime*, traduction française de Natacha Rostowa et Marguerite Jean-Debrit, Paris, Flammarion.

Weil, A., 2001, *Number theory: an approach through history from Hammurabi to Legendre*, New York, Springer Science + Business Media.

Zellini, P., 1993, *Breve storia dell'infinito*, Milano, Adelphi Edizioni.